Tentamen Complexe analyse, 28-01-2004

1. Is de funktie $f(x+iy) = x^2 + iy^2$ een holomorfe funktie op $\mathbf{C}$? (Beredeneer uw antwoord.)

2. $V = \{x + iy \in \mathbf{C} \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ en f is de funktie $f(z) = (z-2)(z-3)$. Volgens welke stelling(en) heeft $|f(z)|$ een maximum op V? Noem dat maximum M. Volgens welke stelling(en) is $|f(z)| < M$ voor de punten $z \in V$ die niet op de rand van V liggen? Bereken M.

3. $U := \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$. Is U open? Is U samenhangend (=pathwise connected)? Is U enkelvoudig samenhangend (=simply connected)? Bestaat er een holomorfe funktie f op U zodat $f(z)^4 = z$ voor alle $z \in U$? (Geef argumenten bij uw antwoord).

$|z| > 1$?

4. Hoe is de convergentiestraal r van $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gedefiniëerd? Bereken de eerste drie termen van de machtreeksontwikkeling van de funktie $f(z) = \frac{z-3}{z^2-3}$ in het punt 0. Welke convergentiestraal heeft die machtreeks?

5. U is de open deelverzameling $\mathbf{C} \setminus \{r \cdot i \mid r \in \mathbf{R}, r \geq 0\}$. Beredeneer dat er een unieke holomorfe funktie f op U bestaat met $f(1) = 0$ en $f'(z) = \frac{1}{z}$ voor alle $z \in U$. Bereken $f(-1)$.

6. $f = \sum a_n z^n$ is een holomorfe funktie op $U := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 2\}$ en bovendien is $|f(z)| \leq 2$ voor elke $z \in U$. Bereken dat $|a_n| \leq 2^{1-n}$ geldt voor elke n. Hint: Schrijf a_n als een integraal.

7. C is de cirkel met middelpunt 0 en straal $\frac{3}{2}$ en voorzien van de orientatie van de klok. Bereken $\int_C \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\, dz$.

8. Bereken de Laurentreeks van $f(z) := (z+1)e^{\frac{1}{z}}$ in het punt 0. Wat voor soort singulariteit heeft f in 0?

9. Bewijs dat de volgende reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^5}$ een meromorfe functie op $\mathbf{C}$ definieert. Bepaal de polen en hun ordes.

10. Bereken de integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+2}\, dx$.

English version on the other side

1. Is the function $f(x + iy) = x^2 + iy^2$ a holomorphic function on $\mathbf{C}$? (Give arguments for your answer)

2. Let $V = \{x + iy \in \mathbf{C} \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ and let f be the function $f(z) = (z - 2)(z - 3)$. According to which theorem(s) does $|f(z)|$ have a maximum on V? Call this maximum M. According to which theorem does $|f(z)| < M$ hold for the points $z \in V$ that are not on the boundary of V? Calculate M.

3. Put $U := \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$. Is U open? Is U pathwise connected? Is U simply connected? Does there exist a holomorphic function f on U such that $f(z)^4 = z$ for all $z \in U$? (Give arguments for your answer).

4. How does one define the radius of convergence r of $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$? Calculate the first three terms of the power series expansion of the function $f(z) = \frac{z-3}{z^2-3}$ at the point 0. What is the radius of convergence of this power series?

5. U is the open subset $\mathbf{C} \setminus \{r \cdot i \mid r \in \mathbf{R}, r \geq 0\}$. Give arguments for the existence and unicity of a holomorphic function f on U satisfying $f(1) = 0$ and $f'(z) = \frac{1}{z}$ for all $z \in U$. Calculate $f(-1)$.

6. $f = \sum a_n z^n$ is a holomorphic function on $U := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 2\}$; moreover $|f(z)| \leq 2$ holds for every $z \in U$. Calculate that $|a_n| \leq 2^{1-n}$ holds for all n. Hint: Write a_n as an integral.

7. C is the circle with center 0 and radius $\frac{3}{2}$, provided with the clockwise orientation. Calculate $\int_C \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\, dz$.

8. Calculate Laurent series of $f(z) := (z + 1)e^{\frac{1}{z}}$ at the point 0. What kind of singularity does f have at 0?

9. Prove that the following series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^5}$ defines a meromorphic function on $\mathbf{C}$. Determine the poles and their order.

10. Calculate the integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+2}\, dx$.